

Chapitre 1 : Fonctions Polynôme du second degré

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ oui avec $a = 3$
- $g(x) = 4 - 2x^2$ oui avec $b = 0$
- $h(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ oui (développé) avec $a = -2$
- $l(x) = 5x - 3$ non car $a = 0$ (fonction affine)
- $m(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ non, c'est un polynôme de degré 4

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Propriété :

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels. } a \neq 0, \beta \text{ et } c \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f .

Démonstration :

$$\text{soit } f(x) = (x-1)^2 + 4$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \\ = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

Rearrange : $\beta = f(\alpha)$

$$\begin{aligned} &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \\ = \frac{20}{4} \\ = 5$$

$$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-5)^2 - 40$

$$\beta = f(\alpha)$$

$$= f(5)$$

$$= 2 \times 5^2 - 20 \times 5 + 10$$

$$= -40$$

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par :

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2(x-1)^2$ est un carré et donc est tj positif

Or

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3. $= f(1) = 3$
pour $x = \dots$ le résultat de la fonction

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β .

- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β .

Remarque :

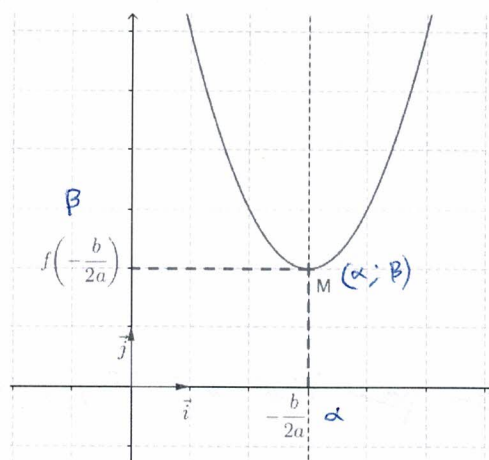
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\frac{b}{2a}$.

un extremum

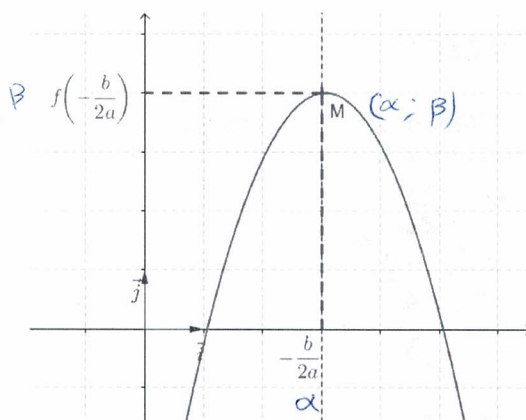
- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	



- Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	



Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

Le point M de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le sommet de la parabole.

Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f .

La parabole possède un axe de symétrie. Il s'agit de la droite d'équation $x = \alpha$ ou $-\frac{b}{2a}$.

Méthode :

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 4x) \\ &= -[(x - 2)^2 - 4] \\ &= (x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

f admet donc un maximum en 2 égal à 4

comme $a = -1 < 0$, les variations de f sont données par le tableau suivant :

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f		4	

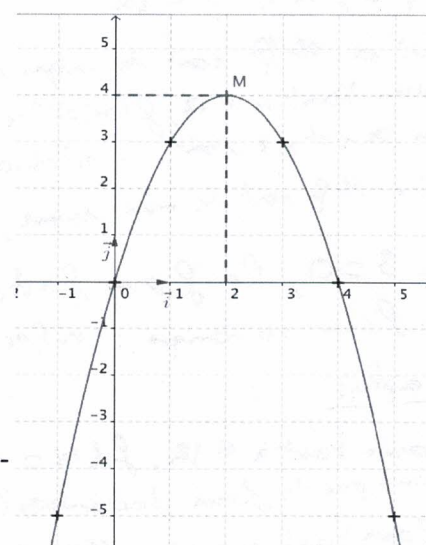
On a également :

$$f(-5) = -45 \quad f(-1) = -5$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3$$

Par symétrie d'axe $x = 2$, on obtient la courbe représentative de f ci-contre.



Exemple :

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation

$$y = 2x^2 - 12x + 1.$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{12}{4}$$

$$= 3$$

$$\beta = f(\alpha)$$

$$= f(3) = 2 \times 3^2 - (12 \times 3) + 1$$

$$= 18 - 36 + 1$$

$$= -17$$

L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 3$.
Et le sommet est $S(3; -17)$

IV - Forme Factorisée

Propriétés :

Soit f un polynôme de degré 2

défini sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$a \neq 0$, α et $\beta \in \mathbb{R}$

- Si a et β sont de signe opposés, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est toujours positif ou négatif, car x_1 et x_2 sont les solutions à $f(x) = 0$.
ex :  si a positif, ex : 
- Si a et β sont de même signe, il n'y a pas de forme factorisée.
ex :  si a positif, ex : 
- Si $\beta = 0$, la forme factorisée f est la forme canonique : $a(x - \alpha)^2$.
ex :  si a positif, ex : 

Exemples :

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, n'admet pas de forme factorisée ($a = 1$; $\alpha = 0$ et $\beta = 1$)

ex :



• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x - 3)^2 - 36$

$$= (x - 3)^2 - 6^2$$

$$= (x - 3 + 6)(x - 3 - 6)$$

$$= (x + 3)(x - 9)$$

donc $x_1 = -3$ et $x_2 = 9$